

Exercice 3

5 points

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \ln\left(e^{\frac{x}{2}} + 2\right).$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \ln(9)$, et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + 2}.$$

On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $e^{\frac{x}{2}} > 0$, on en déduit que $\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} > 0$ et $e^{\frac{x}{2}} + 2 > 0$.

Les deux termes du quotient sont supérieurs à zéro, donc $f'(x)$ est supérieur à zéro sur \mathbb{R} , donc la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

2. On sait que si $u > 0$, alors $\ln(e^u) = u$, donc en particulier

$$f(2\ln(2)) = \ln\left(e^{\frac{2\ln(2)}{2}} + 2\right) = \ln\left(e^{\ln(2)} + 2\right) = \ln(2 + 2) = \ln(4) = \ln(2^2) = \boxed{2\ln(2)}.$$

$$3. \quad u_1 = f(u_0) = \ln\left(e^{\frac{\ln(9)}{2}} + 2\right) = \ln\left(e^{\ln(9^{\frac{1}{2}})} + 2\right) = \ln\left(e^{\ln(3)} + 2\right) = \ln(3 + 2) = \boxed{\ln(5)}$$

4. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $2\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$.

• **Initialisation**

La fonction \ln est strictement croissante sur \mathbb{R} , donc $\ln(4) \leq \ln(5) \leq \ln(9)$ c'est-à-dire $2\ln(2) \leq u_1 \leq u_0$. La propriété est donc vérifiée pour $n = 0$.

• **Hérédité**

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ on ait $2\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$.

On sait que la fonction f est strictement croissante donc :

$$2\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n \iff f(2\ln(2)) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \iff 2\ln(2) \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

Le propriété est donc bien héréditaire.

• **Conclusion**

La propriété est vérifiée pour $n = 0$, et elle est héréditaire pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc d'après le principe de récurrence, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$.

5. D'après la question précédente on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$, ce qui montre que la suite (u_n) est décroissante.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq 2\ln(2)$, donc la suite (u_n) est minorée.

Donc, d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers une limite supérieure ou égale à $2\ln(2)$.

6. a. On résout dans \mathbb{R} l'équation $X^2 - X - 2 = 0$

Calcul du discriminant :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = \boxed{9}.$$

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines distinctes dans \mathbb{R} :

$$X_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{1 - 3}{2} = -1 \quad ; \quad X_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{1 + 3}{2} = 2.$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-1; 2\}}$$

$$b. \quad e^x - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0 \iff e^{\frac{2x}{2}} - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0 \iff \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0$$

Posons $X = e^{\frac{x}{2}}$. On a alors :

$$\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0 \iff X^2 - X - 2 = 0$$

D'après la question précédente, les solutions de l'équation $X^2 - X - 2 = 0$ sont $X_1 = -1$ et $X_2 = 2$. On a donc :

- $e^{\frac{x_1}{2}} = -1$ (impossible car $e^{\frac{x}{2}} > 0$)
- $e^{\frac{x_2}{2}} = 2 \iff \frac{x_2}{2} = \ln(2) \iff x_2 = 2\ln(2)$

$$\mathcal{S} = \{2\ln(2)\}$$

- c. On a vu à la question 5. que la suite (u_n) converge. Soit ℓ la limite de la suite (u_n) . Comme f est une fonction continue, d'après le théorème du point fixe, on a ℓ qui vérifie $f(\ell) = \ell$.

On considère donc l'équation $f(x) = x$:

$$f(x) = x \iff \ln\left(e^{\frac{x}{2}} + 2\right) = x \iff e^{\frac{x}{2}} + 2 = e^x \iff e^x - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0.$$

D'après la question précédente la solution de cette équation est $x = 2\ln(2)$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2\ln(2).$$